

Ara Sınavı Önerilen Çözümleri

Sorular zorluk derecesine göre sıralanmamıştır. Lütfen 4. soruyu ayrı bir kağıda cevaplayınız. Süre 75 dakikadır. Başarılar dilerim.

1. Tüketicinin fayda fonksiyonu $0.5 \log x_1 + 0.5 \log x_2$, bütçe kısıtı $M = p_1x_1 + p_2x_2$ olarak verilmektedir. \log ifadesi doğal logaritmayı (\ln) göstermektedir.
 - (a) Tüketicinin faydasını maksimize eden x_1 ve x_2 talep fonksiyonlarını bulunuz. (İkinci sıra koşullarını elde etmenize gerek yoktur.) Sorunun çözümü için öncelikle Lagrange'ı oluştururuz.

$$L = 0.5 \log(x_1) + 0.5 \log(x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$$

Birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{0.5}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ L_2 &= \frac{0.5}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \\ L_\lambda &= M - p_1x_1 - p_2x_2 \end{aligned}$$

ilk iki birinci sıra koşulunu kullanarak

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

oradan

$$x_2 = \frac{p_1x_1}{p_2}$$

ifadesine ulaşırız. Bu sonucu bütçe doğrusuna yerleştirdiğimizde

$$M - p_1x_1 - p_2\left(\frac{p_1x_1}{p_2}\right) = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemini x_1 için çözdüğümüzde

$$x_1^M = \frac{M}{2p_1}$$

sonucuna ulaşırız ki bu bize birinci mal için talep fonksiyonu verir. Bu sonucu yukarıdaki x_2 'yi tanımlayan eşitliğe koyduğumuzda x_2 için talep fonksiyonuna ulaşmış oluruz.

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{p_1}{p_2} \frac{M}{2p_1} \\ x_2^M &= \frac{M}{2p_2} \end{aligned}$$

- (b) Dolaylı fayda fonksiyonunu elde ediniz. Dolaylı fayda fonksiyonunu fayda fonksiyonunu optimal değerlerde hesapladığımızda buluruz.

$$\begin{aligned} U^*(p_1, p_2, M) &= 0.5 \log\left(\frac{M}{2p_1}\right) + 0.5 \log\left(\frac{M}{2p_2}\right) \\ &= \log M - \log 2 - 0.5 \log p_1 - 0.5 \log p_2 \end{aligned}$$

- (c) 1. mal için Roy Özdeşliğinin geçerli olduğunu gösteriniz.(25 puan) Roy özdeşliği aşağıdaki gibi ifade edilen bir sonuçtur.

$$-\frac{\partial U^*/\partial p_1}{\partial U^*/\partial M} = x_1^M$$

Özdeşliğin geçerli olduğunu görmek için öncelikle gerekli türevleri alıp birbirine oranlarız.

$$\begin{aligned} \partial U^*/\partial p_1 &= \frac{-0.5}{p_1} \\ \partial U^*/\partial M &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

bu iki türevi birbirine oranlayıp -1 ile çarparsak

$$-\frac{\partial U^*/\partial p_1}{\partial U^*/\partial M} = -\frac{\frac{-0.5}{p_1}}{\frac{1}{M}} = \frac{M}{2p_1} = x_1^M$$

sonucunu elde ederiz ki bu Roy özdeşliğinin geçerli olduğunu göstermektedir.

2. Bireyin harcama fonksiyonu

$$e(p_1, p_2, U) = p_1^{2/3} p_2^{1/3} U^{1/3} (2^{1/3} + 2^{-2/3})$$

formatında verilmiştir.

- (a) Fonksiyonun homojenlik derecesini (eğer homojense) belirleyiniz. Bir fonksiyonun homojenlik derecesini görmek için fonksiyonunun değişkenleri hepsi oranda artırılır.

$$\begin{aligned} e(\lambda p_1, \lambda p_2, \lambda U) &= (\lambda p_1)^{2/3} (\lambda p_2)^{1/3} (\lambda U)^{1/3} (2^{1/3} + 2^{-2/3}) \\ &= \lambda^{(2/3)+(1/3)+(1/3)} p_1^{2/3} p_2^{1/3} U^{1/3} (2^{1/3} + 2^{-2/3}) \\ &= \lambda^{4/3} e(p_1, p_2, U) \end{aligned}$$

- (b) 1. Mal için telafi edilmiş talep fonksiyonunu elde ediniz.(25 puan) Bunun için yapılması gereken harcama fonksiyonunu birinci malın fiyatına göre türevi almaktır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^*}{\partial p_1} &= \frac{2}{3} p_1^{-1/3} p_2^{1/3} U^{1/3} (2^{1/3} + 2^{-2/3}) \\ &= \left[\frac{p_2 U}{p_1} \right]^{1/3} \frac{1}{3} (2 * 2^{1/3} + 2^{1/3}) \\ &= \left[\frac{2p_2 U}{p_1} \right]^{1/3} \end{aligned}$$

3. Firmanın kar fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\pi^*(p, w_1, w_2) = 4w_1^{-2}w_2^{-6}p^9$$

(a) Firmanın arz fonksiyonunu bulunuz.

$$\frac{\partial \pi^*(p, w_1, w_2)}{\partial p} = 36w_1^{-1}w_2^{-6}p^8$$

(b) Birinci faktör için girdi talep fonksiyonunu bulunuz.

$$\frac{\partial \pi^*(p, w_1, w_2)}{\partial w_1} = -8w_1^{-3}w_2^{-6}p^9$$

$$x_1^* = 8w_1^{-3}w_2^{-6}p^9$$

(c) İkinci faktörün fiyatındaki değişmenin birinci faktör üzerindeki etkisini bulunuz. (25 puan)

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} = -48w_1^{-3}w_2^{-7}p^9 < 0$$

4. Okuma parçalarımızın çizdiği sınır çerçevesinde;

(a) Matematğin bilim için önemini kısaca açıklayınız. (15 puan)

(b) "Matematiksel doğruluk", " Olgusal doğruluk" kavramlarından ne anlaşılması gerektiğini kısaca açıklayınız. (10 puan)