Ankara Üniversitesi, Siyasal Bilgiler Fakültesi
2- İktisat
2006-2007 Bahar Dönemi Matematiksel İktisat Doç.Dr. Hasan Şahin

Yıl Sonu Sınavı Önerilen Çözümler

Sorular zorluk derecesine göre sıralanmamıştır. Her bir soru 25 puandır. Başarılar dilerim.

1. Tek girdi kullanarak üretim yapan tam rekabetçi firmanın sahip olduğu kar fonksiyonu aşağıdaki gibidir

$$\pi = pf(x) - wx$$

denklemde p satılan malın fiyatını, x kullanılan girdi miktarını, w girdi fiyatını göstermektedir. Bu bilgiler ışığında satılan malın fiyatındaki artışın optimal x üzerindeki etkisini bulunuz. Çözüm için için birinci sıra koşulu aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\pi}{dx} = pf'(x) - w = 0$$

bu birinci sıra koşulu x için çözüldüğünde optimal x modeldeki parametrelerin bir fonksiyonu olacaktır, $x = x^*(w,p)$. Bu optimal çözüm birinci sıra koşuluna yerleştirildiğinde bir denklik elde ederiz.

$$pf'(x^*(w,p)) - w \equiv 0$$

Satılan malın fiyatındaki değişikliğin etkisini bulmak için yukarıdaki ifadenin p değişkenine göre türevini alırız.

$$f'(x^*(w,p)) + pf''(x^*(w,p))\frac{\partial x^*}{\partial p} = 0$$

bu ifadeyi aradığımız etki için düzenlersek

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{\overbrace{f'(x^*(w,p))}^{+}}{\underbrace{pf''(x^*(w,p))}_{-}} > 0$$

2. Aşağıdaki gibi bir ekonomik modele sahip olduğumuzu varsayalım

$$\begin{aligned} C_t &= a + bY_{t-1} \\ E_t &= C_t + I_t + G_t \\ Y_t &= E_t \end{aligned}$$

C ve E içsel değişkenler, I ve G dışsal değişkenlerdir. Y için genel çözümü elde ediniz. Hangi koşul yada koşullar gerçekleştiğinde denge gelir düzeyi Y istikrarlıdır? Sorunun çözümü için öncelikle Y için bir fark denklemi oluşturmak gerekecektir. bunun için aşağıdaki sıralamayı oluşturabiliriz.

$$Y_t = a + bY_{t-1} + I_t + G_t$$

bu fark denkleminin çözümü iki parçadan olaşacaktır. Denge yada özel integral, y_p çözümü için

$$\begin{aligned} Y &= a + bY + I + G \\ Y_p &= \frac{a + I + G}{(1-b)} \end{aligned}$$

Türdeş kısmın çözümü için çözüm önerisi $Y_t = Ac^t$. Bu çözüm önerisini türdeş fonksiyona yerleştirdiğimizde

$$\begin{aligned} Y_{t+1} - bY_t &= 0 \\ Ac^{t+1} - bAc^t &= 0 \\ Ac^t(c-b) &= 0 \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$c = b$$

olacak ve türdeş kısmın çözümü

$$y_c = Ab^t$$

olacaktır. Genel çözüm ise

$$Y_t = \frac{a + I + G}{(1-b)} + Ab^t$$

olacaktır. İstikrar için $|b| < 1$ olmalıdır.

3. Doğrusal olmayan diferansiyel denklem

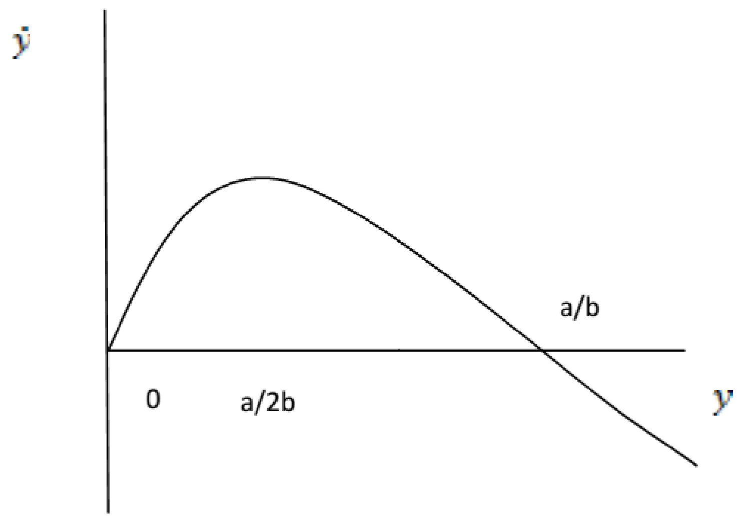
$$\dot{y} = y(a - by)$$

biçimde verilmektedir.

(a) Denge noktasını bularak denge noktasının istikrarlı olup olmadığını faz diyagramı kullanarak gösteriniz. Denge noktasını bulmak için

$$0 = y(a - by)$$

ifadesini y için çözeriz. Buna göre çözümün bir tanesi $y = 0$ diğeri de $y = a/b$'dir. Bu denge noktalarının istikrarı için faz diyagramı a/b dengesi istikrarlı buna karşılık 0 dengesi istikrarsızdır.



(b) Diferansiyel denklemi çözünüz.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay - by^2 \\ \dot{y} - ay &= by^2 \\ \frac{\dot{y}}{y^2} - ay^{-1} &= b \end{aligned}$$

bu aşamda $z = y^{-1}$ tanımlaması yaparak

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -y^{-2}\frac{dy}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= (-\frac{dz}{dt})y^2 \end{aligned}$$

daha kısa formatta yazarsak

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\dot{z}y^2 \\ -\dot{z} &= \frac{\dot{y}}{y^2} \end{aligned}$$

ve buradan hareketle yeni değişkenler cinsinden türevsel denklem

$$-\dot{z} - -az = -b$$

her iki tarafı eksi bir ile çarparsak

$$\dot{z} + az = b$$

formatında birinci sıra türevsel denklem elde ederiz. Özel integral çözümü

$$z_p = b/a$$

türdeş kısmın çözümü ise

$$z_c = Ae^{-at}$$

dolayısıyla çözüm

$$z = \frac{b}{a} + Ae^{-at}$$

fakat

$$z = \frac{1}{y}$$

olduğundan

$$y = \frac{1}{\frac{b}{a} + Ae^{-at}}$$

4. İki değişkenli diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 + y_2 - 16 \\ \dot{y}_2 &= 4y_1 + y_2 - 34 \end{aligned}$$

(a) Sistemin denge değerlerini bulunuz. (Çözümün y_p kısmı)

$$\begin{aligned} 0 &= y_1 + y_2 - 16 \\ 0 &= 4y_1 + y_2 - 34 \end{aligned}$$

Buradan hareketle denge değerleri

$$y_1^* = 6, \qquad y_2^* = 10$$

(b) Sistemin y_c kısmını da bularak genel çözümü elde ediniz. Dengenin istikrarlı olup olmadığını *gerekçesiyle* belirtiniz. Türdeş kısmın çözümü için

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karekteristik kökleri $r_1 = -1$, ve $r_2 = 3$'tür. Buna karşılık gelen karekteristik vektörler sırasıyla $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dolayısıyla çözüm

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} ke^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} ke^{3t}$$

Buradan hareketle dengenin istikrarsız olduğunu söyleyebiliriz. Çünkü kök 3 uzun dönemde dominant olacaktır.