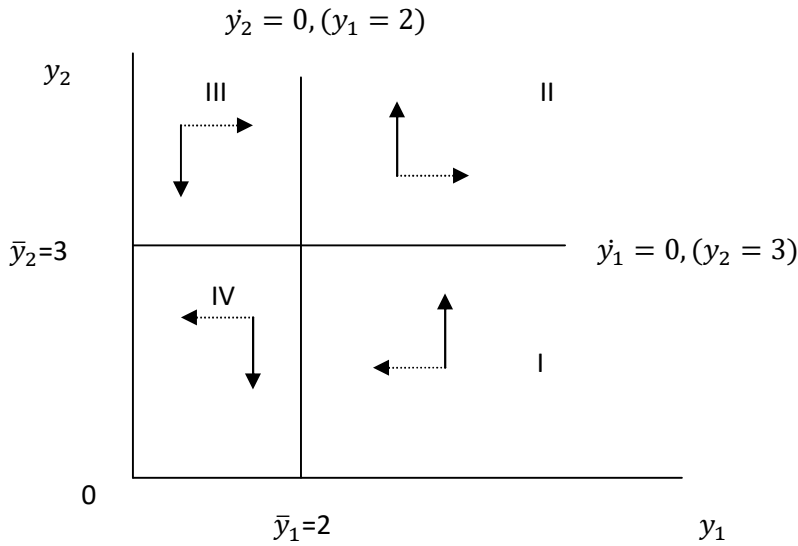


Faz Diyagramı Çizimi Açıklamaları

$\dot{y}_1 = 2y_2 - 6$
 $\dot{y}_2 = 8y_1 - 16$ Türevsel denkleminin 1) denge değerlerinin bulunuz. 2) Bulmuş olduğunuz dengenin istikrarlı olup olmadığını tespit ediniz.

Denge değişkenlerin değerinde değişiminin olmadığını bir durum olarak tanımladığında bu iki türevsel denklem $0 = 2y_2 - 6$
 $0 = 8y_1 - 16$ formatında iki bilinmeyenli olduğu bir denklem sistemine dönüşür. Bu denklemleri çözdüğümüzde y_1 2 değerine y_2 ise 3 değerine sahip olacaktır.

Dengenin istikrarlı olup olmadığını sistemin faz diyagramını oluşturarak karar verebiliriz. Faz diyagramı Şekil 1' de olduğu gibi olacaktır. Düz çizgi y_2 değişkenin denge dışı bir değerde olduğunda nasıl hareket edeceğini kesikli çizgiler ise benzer şekilde y_1 değişkenin denge değerinin dışında bir yerde olduğunda nasıl hareket edeceğini göstermektedir. Örneğin iki nolu bölgede olduğunda y_2 kuzeye doğru y_1 batıya doğru gitmek isteyen vektörel kuvvete bağlı olarak değişkenler kuzeybatıya doğru gidecektir. Diğer bölgelere ilişkin yorumlar benzer şekilde yapılabilir.

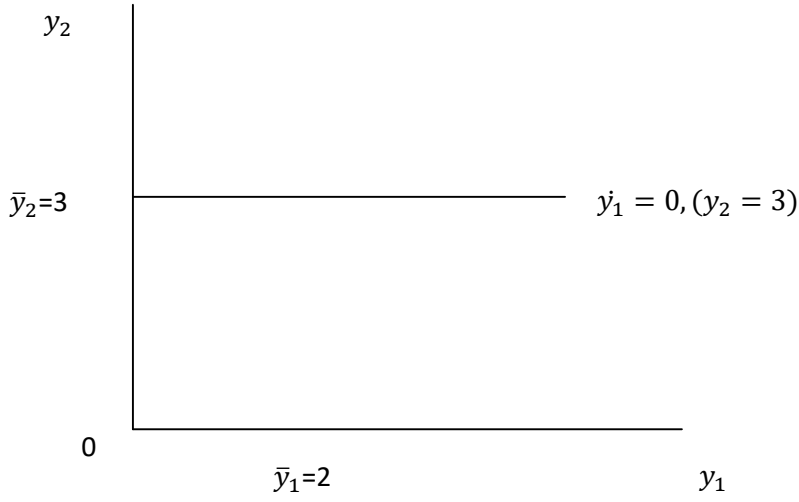


Şekil 1.

Aşama aşama çizimin açıklaması

$\dot{y}_1 = 0$ koşulu bize $y_2 = 3$ eşitliğini verir. Bu eşitlik y_1 hangi değeri alırsa alsın y_1 'deki değişimin sıfır olacağı değeri verir (ki bu da 3 değeridir).

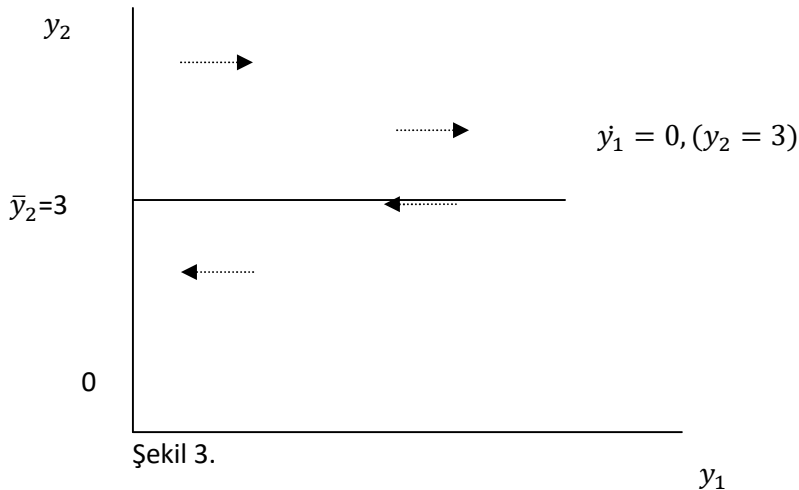
$y_2 = 3$ doğrusunun nasıl olacağını Şekil 2'de görebiliriz.



Şekil 2.

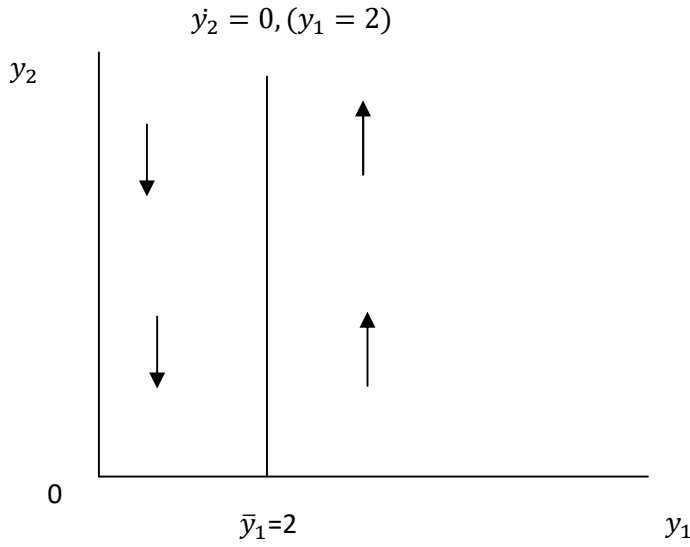
Görüldüğü üzere y_1 'deki değişimin sıfır olduğu noktaları gösteren $y_2=3$ doğrusu yatay eksene paralel bir doğrudur. Şimdi bulmak istediğimiz, $y_2=3$ doğrusunun üst kısmında (örneğin 4 veya 5 değerinde) olduğumuzda y_1 'nin artmakta mı yoksa azalmakta mı olduğudur. Bunun bir kolay yolu y_1 denklemini farklı değerlerde hesaplamak ve buradan bir sonuç çıkarmaktır. Örneğin $y_1 = 2y_2 - 6$ ifadesini $y_2 = 4$ değerinde hesaplırsak sonuç $y_1 = 2(4) - 6 = 2$ olacaktır. Burada önemli olan sayısal büyüklük değil işarettir. İşlemin sonucu pozitif olduğundan $y_2 = 4$ değerinde zaman içinde y_1 değeri artıyor demektir. Aslında bu ifade y_2 'nin üçten büyük bütün değerleri için geçerlidir. Diğer bir ifadeyle $y_2=3$ doğrusunun üst kısmında yer alan bütün değerlerde y_1 zaman içinde artmaktadır. Bu artışı özetlemek için Şekil 3' deki gibi oklar kullanmak mümkündür. $y_2=3$ doğrusunun üst kısmındaki değerlerdeki artışı göstermek için okun başı sağa gösterilmektedir.

Benzer bir değerlendirme de $y_2=3$ doğrusunun altındaki noktalar için yapılabilir. Bu durumda 3 değerinden düşük değerlerde y_1 zaman içinde azalacağı görülecektir ($y_2=2$ değerinde y_1 'nin değişiminin işareti eksi olacaktır.) . Bunu da özetlemek için $y_2=3$ doğrusunu altındaki noktalardaki azalışı temsil etmek için okların başı solu gösterecek şekilde çizilmiştir.



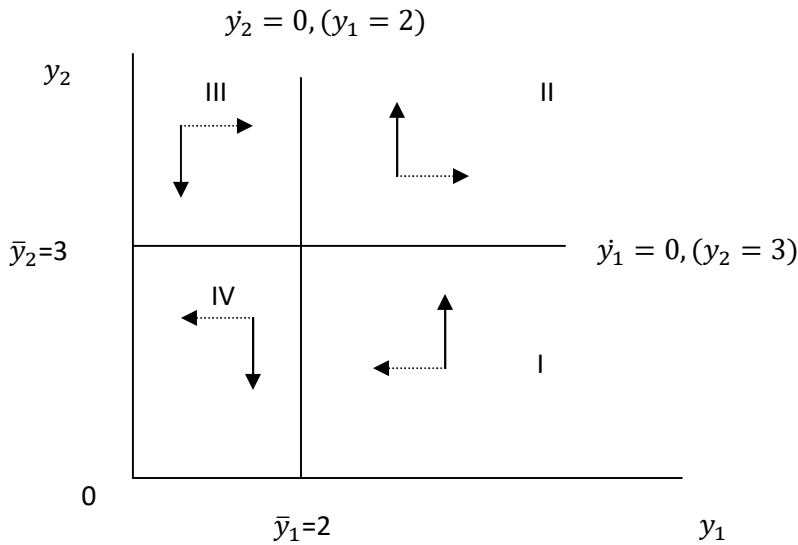
Şekil 3.

Şimdi benzer analizi sistemin ikinci denklemi için yapabiliriz. $y_2' = 8y_1 - 16$ denkleminde hareketle y_2' 'deki değişim sıfır olduğu noktaları temsil eden denklem $y_1=2$ 'tür. Bunu Şekil 4'de görebiliriz. Şimdi karar vermemiz gereken durum $y_1=2$ doğrusunun sağında ve solunda y_2' 'deki değişimin ne yönde olacağıdır. Bunun için y_1 'nin sağında herhangi bir noktada hesaplama yapılabilir. Örnek olarak $y_1=3$ olsun, bu durumda $y_2' = 8(3) - 16 = 8$ değerini alır. İşaret pozitif olduğundan $y_1=2$ doğrusunun sağında y_2 değişkeninin zaman içinde arttığını söyleriz ve bunu kuzey yönüne doğru giden bir okla gösterebiliriz. Benzer aşamaları takip ederek $y_1=2$ doğrusunun solunda y_2 değişkeninin zaman içinde azaldığı sonucuna ulaşırız. Bu sonucu da $y_1=2$ 'nin solunda güneye doğru giden bir ok ile gösterebiliriz. İfade ettiklerimizin görsel hali şekil ** da gözükmektedir.



Şekil 4.

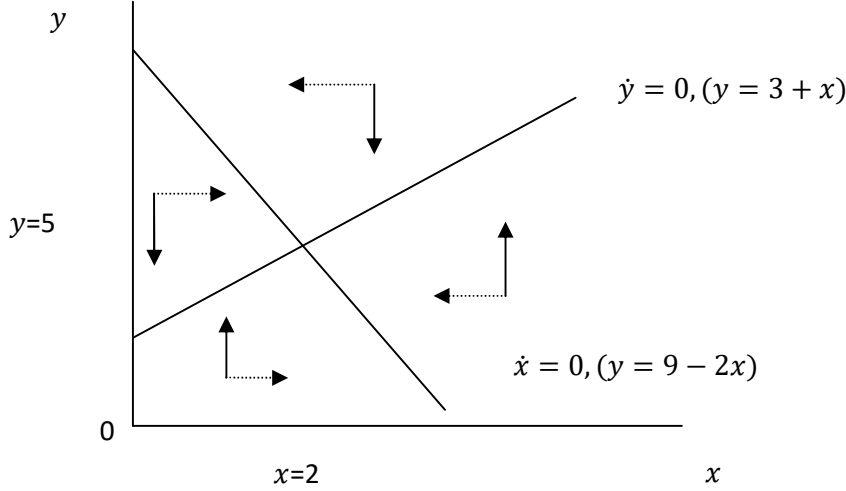
Bu iki ayrı Şekli bir araya getirdiğimizde başta verilen sistemin faz diyagramına ulaşırız.



Şekil 5.

$\dot{x} = -2x - y + 9$
 $\dot{y} = -y + x + 3$ türevsel denkleminin denge değerlerini bulunuz ve dengenin istikrarlı olup olmadığını belirleyiniz.

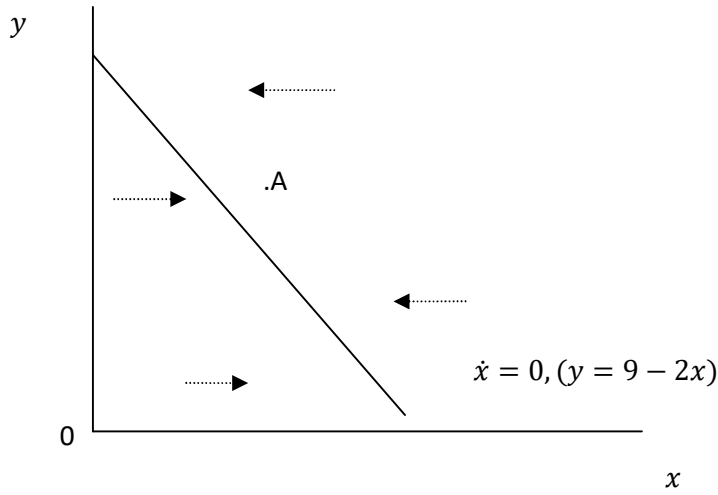
Denge koşulunda sistem $\begin{matrix} 0 = -2x - y + 9 \\ 0 = -y + x + 3 \end{matrix}$ formatına ulaşır. İki bilinmeyen iki denklemleri çözüldüğünde $x=2$ ve $y=5$ değerlerine ulaşılır. Bu denge noktasının istikrarlı olup olmadığına karar vermek için sistemin ifade ettiği faz diyagramı kullanılabilir. Sisteme ilişkin faz diyagramı Şekil 6'da verilmektedir. İki doğrunun keşiştiği nokta bize denge değerlerini göstermektedir.



Şekil 6.

Sistemin ok yönlerine bakıldığında hangi alanda olursak olalım sistem dengeye ulaşacaktır. Bu nedenle denge istikrarlı bir dengedir. Şimdi bu faz diyagramının nasıl çizildiğini ve okların yönünün nasıl belirlendiğini aşama aşama ele alalım.

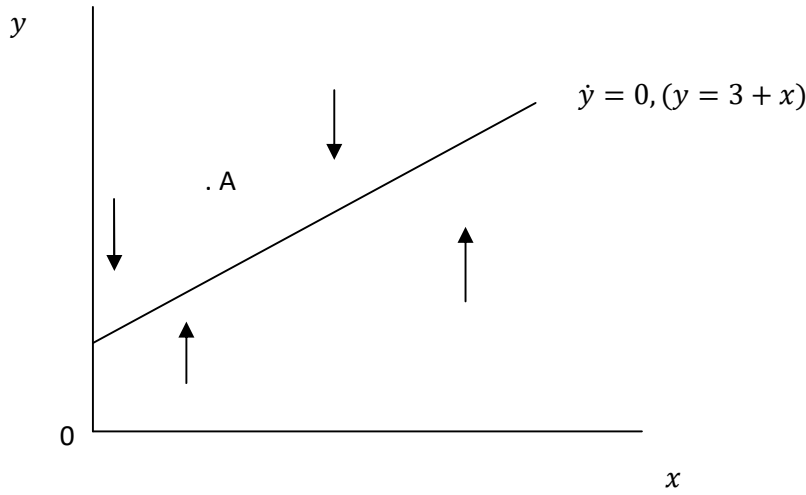
$\dot{x} = -2x - y + 9$ denklemi x' 'de değişme olmadığı olmadığında bizi $0 = -2x - y + 9$ denklemine götürür. Bu denklem her bir x değerine karşı y 'nin alacağı değeri göstermektedir. Burada dikkat edilmesi gereken durumun her bir x 'e karşılık gelen y değeri x 'deki değişmeyi sıfır yapan y değeridir. x ile y arasındaki ilişki $y = 9 - 2x$ denklemi ile gösterebilir. Örneğin $x=1$ olduğunda x 'dek bir değişiklik olmaması için y 'nin alacağı değer 7'dir. bunun gibi sonsuz sayıda x ve buna karşılık gelen y hesaplanabilir. Eğer bu denklemi şekil'de gösterecek olursak Şekil 7' deki gibi bir doğru ile ifade edilebilir.



Şekil 7.

Tekrarlamak gerekirse bu doğru üzerindeki nokta kombinasyonlarında x 'deki değişim sıfırdır, x de herhangi bir değişim yoktur. A gibi bir nokta denklemin ifade ettiği noktaların üst kısmında gelen bir x y kombinasyonunu ifade etmektedir. A noktasının $(2,6)$ x ve y değerlerine karşılık geldiğini varsayalım. Merak ettiğimiz husus x değişkeninin bu noktadan sonra artacağını azalacağını mıdır? Öncelikle x deki artış ve azalış x ekseninde olacağı için referans eksenimiz x eksenidir. Bu anlamda artış doğru yönünde bir hareketi azalış batı yönünde bir hareketi gerektirir. Bu aşamada yapacağımız iş verilen A noktasında x 'deki değişim denklemini hesaplamaktır. $\dot{x} = -2(2) - 6 + 9 = -1$ görüldüğü üzere x 'deki değişimin yönü eksidir. Bu zaman içinde x 'in azalacağını söylemektedir. Dolayısıyla A gibi bir noktada sola, batıya doğru bir hareket oluşur. Bir başka ifade ile x zaman içinde azalır. Bu husus $y = 9 - 2x$ doğrusunun sağındaki bütün noktalar için geçerlidir. $y = 9 - 2x$ doğrusunun solundaki bütün noktalarda da x 'in zaman içinde artacağı rahatlıkla görülür.

$\dot{y} = -y + x + 3$ türevsel denklemi y değişkeninin zaman içinde nasıl hareket ettiğini göstermektedir. y 'de herhangi bir değişim olmadığı durum $0 = -y + x + 3$ ifadesi ile ya da onun eşleniği olan $y = 3 + x$ denklemi ile gösterilebilir. Bu denklem bize her bir x değerine karşılık y 'deki değişimi sıfır yapan y değerini verir. Örneğin $x=1$ değerini aldığı anda y herhangi bir değişiklik olmaması için y 'nin alması gereken değer $y = 3 + 1 = 4$ 'tür. Bu değer dışındaki bir değerde y 'nin zaman içindeki değeri y 'nin alacağı değere bağlı olarak artacak veya azalacaktır. Şimdi bu değişken için faz diyagramına yönelik olarak şekli oluşturalım.

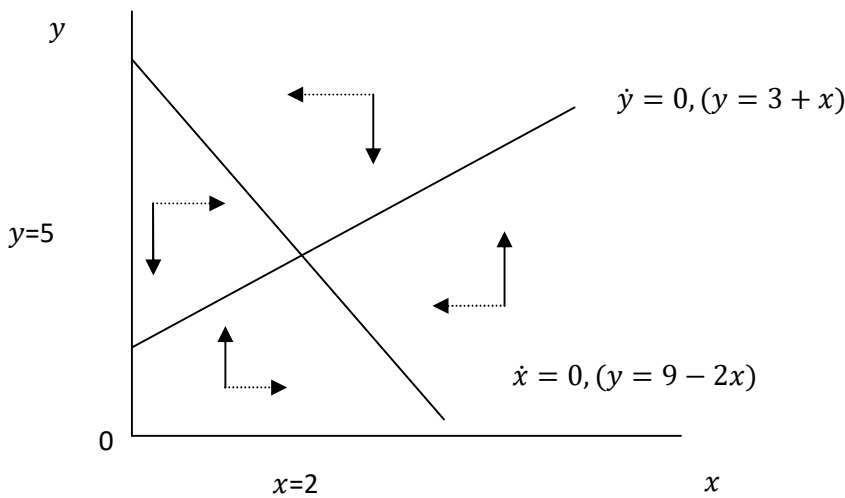


Şekil 8.

Şekil 8 $\dot{y} = 0$, veya $y = 3 + x$ doğrusunu göstermektedir. Daha öncede belirttiğim üzere $y = 3 + x$ denklemi her bir x değerine karşılık y 'de herhangi bir değişimin olmamasını sağlayan y değerlerini vermektedir. Bu noktalar referans alınarak bu doğrunun üst kısmında ve alt kısmında değişimin ne yönde olacağı belirlenebilir. Varsayalım ki A noktası $(1,6)$, x ve y kombinasyonunu ifade ediyor. Bu noktada y zaman içinde artıyor mu azalıyor mu? Buna karar vermek için türevsel denkleme bu değerleri yerleştirip işaretine bakmak yeterli olacaktır. A noktasında türevsel denklemin değeri $\dot{y} = -6 + 1 + 3 = -2$ 'dir. Yani y azalmaktadır. Bu azalma y eksenine referans alındığında güney yönünde bir hareket demektir. Dolayısıyla ok yönleri güney olan bir doğru ile bu durum özetlenebilir. Daha önce de ifade edildiği gibi bu durum $y = 3 + x$ doğrusunun üst kısmında kalan bütün noktalar için geçerlidir. Üst kısımda kalan bütün noktalarda y için zaman içinde azalış söz konusudur.

$y = 3 + x$ doğrusunun alt kısmında kalan noktalar için tersi söz konusudur. Bu noktalarda y değişkeninin de bir artış durumu vardır ve bu artış ok yönü kuzey olan doğru parçaları ile gösterilebilir.

x ve y değişkenine ilişkin bilgiler bir araya getirildiğinde başta verilen faz diyagramına ulaşırız.



Şekil 9.

Bu noktaya kadar yapılan açıklamalarda sistemin dinamiğini belirlemek için türev kavramının kullanmadık. Türevi kullanarak değişkenlerin zaman içinde hangi yöne doğru hareket edeceğini belirlemek mümkündür.

Bir önceki örnekteki ilk denklemleri alalım. $\dot{x} = -2x - y + 9$ bu denklemin x değişkenine göre türevi $\frac{d\dot{x}}{dx} = -2$ değerine eşittir. Bu türevi x 'in değerinin zaman içindeki değişimi konusunda nasıl kullanacağı konusu şu aşama belirli değildir. İlk söyleyebileceğimiz husus türevin işaretinin eksi olduğudur. Bu x 'in zaman içinde azalacağı anlamına gelir. Fakat x 'in hangi bölgede azalacağı bilebilmek zordur. Burada önce $\dot{x} = 0$ doğrusu üzerinde değişimin sıfır olduğu tespiti tekrardan yapalım. Bu doğrudan hareketle doğruya doğru hareket edersek yukarıdaki türevin işareti x 'in zaman içinde ne yöne doğru hareket edeceğini gösterir. Mevcut örnekte türevin işareti eksi olduğundan $\dot{x} = 0$ doğrusunun sağındaki noktalarda x 'in azalacağı sonucuna varırız. Bu sonucu yani x 'de azalmayı ok yönü batı olan doğrularla gösteririz. Bir kez bu tespiti yaptıktan sonra $\dot{x} = 0$ doğrusunun solunda durumun tersi olacağını yani x 'in zaman içinde artacağını tespit ederiz. Sonuç olarak $\dot{x} = 0$ doğrusunun üstündeki noktalarda x 'deki değişim sıfır, solundaki noktalarda artan sağındaki noktalarda azalandır.

ikinci denklemleri kullanarak y 'nin dinamiğine karar vermek istediğimizde $\dot{y} = -y + x + 3$ türevsel denkleminin y 'göre türevini alırız. Bu türev $\frac{d\dot{y}}{dy} = -1$ sonucuna eşittir.. Bu sefer bu türevi kullanırken hareket noktamız $\dot{y} = 0$ noktasından kuzeye doğru gitmektir. Kuzeye doğru gidişimiz gerçekleştiğinde nihayetinde y 'nin ne yöne hareket edeceğini türevin işareti söylemektedir. Gözükten durum $\dot{y} = 0$ noktasından kuzeye doğru hareketin sonucunda y azalacaktır. Bu azalmayı ok yönü güney olan bir doğru ile gösteririz. Sonuç olarak $\dot{y} = 0$ doğrusunun kuzeyindeki noktalarda y azalmakta güneyindeki noktalarda y artmaktadır.