Hasan Şahin

Matematiksel İktisat Ders Notları

1 Firma Teorisi

1.1 Kar maksimizasyonu

1.1.1 Tek Girdi Tek Çıktı

Öncelikle tek girdili bir üretim fonksiyonu kullanarak karşılaştırmalı durağanlık analizini nasıl gerçekleştirebileceğimizi göstermeye çalışacağız. Firmanın girdiyi tam rekabet piyasasından elde ettiğini, çıktısını yine tam rekabet piyasasında sattığını varsaymaktayız. Klasik varsayımları sağlayan bir üretim fonksiyonunu olduğu yine varsayımlarımız arasında. Bu senaryo altında karını maksimize etmek isteyen tam rekabetçi firmanın kar maksimizasyon problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\max_{x} \pi = pf(x) - wx$$

burada x girdiyi $f(x)$ üretim fonksiyonunu p satılan malın fiyatının w girdiye ödenen tutarı göstermektedir. Firma için p ve w dışşal değişken x içsel değişkendir; firma kar maksimizasyonu için optimal girdi miktarını belirleyebilir. Karşılaştırmalı durağanlık analizinde temel olarak içşel değişkenlerin dışşal değişkenlerdeki değişmeden nasıl etkilendiğini bulunmaya çalışılır. Bu egzersiz en genel formda gerçekleştirilmeye çalışıyor. Bu anlamda yukarıdaki maksimizasyon problemi en genel format olarak kabul edilebilir.

İçsel değişkenlerin dışşal değişkenleri nasıl etkilediği analizini üç değişik formatta gerçekleştirerek bu noktaya kadar ifade ettilerimizi daha açık hale getirmeye çalışacağız.

1. Birinci Yöntem

Bu yöntemde maksimizasyon en özel hali ile ele alınmaktadır. üretim fonksiyonun biçimi, girdi ve çıktının fiyatı verilmektedir. Bu anlamda üretim fonksiyonunu $y = f(x) = x^{0.5}$, satılan malın fiyatını 4, $p = 4$, girdinin birim maliyetini 2 olarak alırsak $w = 2$ firmanın maksimizasyon problemini

$$\max_{x} \pi = 4x^{0.5} - 2x$$

biçiminde yazabiliriz. Optimal x değerini bulmak için önce birinci sıra koşulunu kullanarak optimal x değerini buluruz. Birinci Sıra Koşulu $(B.S.K)$

$$\begin{aligned}
\frac{d\pi}{dx} &= \frac{2}{x^{0.5}} - 2 = 0 \\
\frac{2}{x^{0.5}} &= 2 \\
x^* &= 1
\end{aligned}$$

Bu değerin gerçekten kar maksizasyonun sağlayıp sağlamadığını tesbit için ise ikinci sıra koşuluna bakarız. Tek değişkenli optimizasyon sorununda ikinci türevin negatif olması durumunda maksimizasyon problemi çözülmüş demektir. İkinci Sıra Koşulu $(\dot{I}.S.K)$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -\frac{1}{x^{1.5}}$$

çıkan bu ifadeyi optimal x değerinde hesaplarsak

$$-\frac{1}{1^{1.5}} = -1 < 0$$

sonucunu elde ederiz ki bu maksimizasyon problemi çözülmüş olduğunu göstermektedir. Bu girdi düzeyinde firmanın karını ve üretimi bulmak da mümkündür.

$$\begin{aligned}
\pi^* &= 4 * 1^{0.5} - 2 * 1 = 2 \\
y^* &= 1^{0.5} = 1
\end{aligned}$$

Şimdi firmanın satmış olduğu ürünün fiyatı 5'e çıktığında optimal x miktarının ne olacağı (artma ya da azalma) sorusuna cevap bulmak istediğimizde firmanın maksimizasyon problemini yeniden ifade edip yukarıdaki aşamaları tekrarlayıp çözmemiz gerekir.Yani

$$\max_x \pi = 5x^{0.5} - 2x$$

ifadesini çözen x değerini bulup bir önceki değerle karşılaştırmamız gerekir. Bu problemi çözdüğünüzde optimal değerin $x^* = 1.562\,5$ olduğunu görmek mümkündür. Bu durumda satılan malın fiyatı arttığında kullanılan optimal girdi miktarının arttığı sonucuna ulaşabiliriz. Dikkat edilmesi gereken husus bu sonuca ulaşmak için ikinci defa yeni değerlerde problemin çözülmesi gerekliliğidir.

2. İkinci Yöntem

İkinci yöntemde değişkenlere ve parametrelere spesifik sayısal değerler vermek yerine bu değişkenlerin alacağı değer aralıklarını belirleyerek optimizasyon problemini çözmeye çalışırız. Üretim fonksiyonu

$$y = f(x) = x^{\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1$$

formunda verilmekte, girdi ve çıktı fiyatları sıfırdan farklı pozitif değerler almaktadır. Bu durumda maksimizasyon problemi

$$\max_{x} \pi = px^{\alpha} - wx$$

biçiminde ifade edilebilmektedir.

$$B.S.K \ , \quad \frac{d\pi}{dx} = \alpha p x^{\alpha-1} - w = 0$$

ifadesini çözecek x değerini bulmamız gerekir.

$$\begin{aligned}
\alpha p x^{\alpha-1} - w &= 0 \\
\alpha p x^{\alpha-1} &= w \\
x^{\alpha-1} &= \frac{w}{\alpha p} \\
x^{*} &= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

Bu son ifade karı maksimize eden optimal x'i vermektedir. Bir önceki çözümden farklı olarak burada sayısal bir değer yoktur. Bunun nedeni modelde değişkenlere sayısal değer verilmemesidir. Optimal x değişkenlerin bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir. Bu ifade karı maksimize eden girdi talep fonksiyonu olarak da adlandırılır. Bu ifadenin gerçekten kar maksimizasyonu gerçekleştirdiğini görmek için ikinci sıra koşulununu işaretini negatif olması gerekir.

$$\dot{I}.S.K, \qquad \frac{d^2\pi}{dx^2} = (\alpha-1)\alpha p x^{\alpha-2}$$

yukarıdaki ifade $(\alpha - 1)$'nin negatif olması dolasıyla sıfırdan küçüktür. Dolayısıyla kar maksimizasyon koşulu gerçekleşmiştir. Bu aşamada bir önceki örnekte olduğu gibi satılan malın fiyatındaki bir artışın optimal x üzerindeki etkisini bulabiliriz. Bunun için yapmamız gereken optimal x'in p'ye göre türevini almaktır. Yani $\frac{\partial x^*}{\partial p}$ ifadesini bulup işaretini belirlememiz gerekir. Öncelikle optimal x değerini türev alma işlemini daha rahat gerçekleştirmek içn düzenleyelim(düzenlemeden de yapılabilir).

$$\begin{aligned} x^* &= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ x^* &= \alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}} w^{\frac{1}{\alpha-1}} p^{-\frac{1}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

şimdi son ifadenin p'ye göre türevini alırsak

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = (-\frac{1}{\alpha-1})\alpha^{-\frac{1}{\alpha-1}} w^{\frac{1}{\alpha-1}} p^{-\frac{1}{\alpha-1}-1}$$

parentez içi ifade de dahil olmak üzere bütün terimler pozitif olduğundan $\frac{\partial x^*}{\partial p} > 0$ sonucuna ulaşırız. Yani satılan malın fiyatındaki artış optimal girdi miktarını artırır. Görüldüğü üzere burada ikinci kez bir optimizasyon problemi çözmeye gerek kalmamıştır. Bunu sağlayan ise problemin bir miktar genel yazılmasıdır(sayısal değerlerin kullanılmamasıdır).Elde ettiğimiz optimal girdiyi üretim fonksiyonunda yerine koyarak firmanın arz fonksiyonunu aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} y^*(w,p) &= f(x^*) = x^{*\alpha} \\ y^*(w,p) &= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \end{aligned}$$

arz fonksiyonu üretilen ürünün ve girdinin fiyatının bir fonksiyonu olarak görülmektedir. Firmanın arz fonksiyonunu kullanarak girdinin ve çıktının arz edilen miktar üzerine etkisi bulunabilir. Aşağıdaki ifadelerinin işaretlerini birer egzersiz olarak bulmaya çalışabilirsiniz

$$\frac{\partial y^*}{\partial w}, \qquad \frac{\partial y^*}{\partial p}$$

yine optimal x sonunucu kar denkleminde yerine koyarak kar fonksiyonunu elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\pi^*(w,p) &= p\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - w\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
&= p\left(\frac{w}{\alpha p}\right)\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - w\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
&= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[p\left(\frac{w}{\alpha p}\right) - w\right] \\
&= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[\frac{w}{\alpha} - w\right] \\
&= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\left[\frac{w-\alpha w}{\alpha}\right] \\
\pi^*(w,p) &= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} w\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

elde edilen bu kar fonksiyonu üzerinden karşılaştırmalalı analizler yapabiliriz. Örneğin satılan malın kar üzerinde yaratacağı etkiyi bulabiliriz.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi^*}{\partial p} &= -1\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}-1} w\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{w}{\alpha p^2}\right) \\
&= w\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}-1}\left(\frac{w}{\alpha p}\right)\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= w\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}-1}\left(\frac{w}{\alpha p}\right)\left(\frac{1}{p}\right) \\
&= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}-1}\left(\frac{w}{\alpha p}\right) \\
&= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}-1+2} \\
\frac{\partial \pi^*}{\partial p} &= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

bu son ifade firmanın arz fonksiyonunu vermektedir. Buradan ulaştığımız bir nokta satılan ürünün fiyatı artınca kar üzerinde pozitif bir etkisi olmakta diğer nokta da kar fonksiyonunun satılan mala göre türevini aldığımızda firmanın arz fonksiyonuna ulaşmaktayız.

Kar fonksiyonunun girdi fiyatına göre türevi alındığında girdi talep fonksiyonunun negatif işaretlisini elde edeceğimizi siz gösterebilirsiniz.Yani

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial p} = -x^*$$

olduğunu gösterebilirsiniz.

Çözüm: Önce kar fonksiyonunu türevi daha rahat almak için düzenleyelim.

$$\begin{aligned}
\pi^*(w,p) &= \left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} w \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\
\pi^*(w,p) &= w^{\frac{1}{\alpha-1}+1} \left(\frac{1}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\
\pi^*(w,p) &= w^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

Şimdi ifadeyi w'ya göre türevini alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi^*(w,p)}{\partial w} &= \frac{\alpha}{\alpha-1} w^{\frac{\alpha}{\alpha-1}-1} \left(\frac{1}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \\
&= -w^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \left(\frac{1}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
&= -\left(\frac{w}{\alpha p}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\
\frac{\partial \pi^*(w,p)}{\partial w} &= -x^*
\end{aligned}$$

3. Üçüncü Yöntem

Üçüncü yöntemde kar maksimizasyonu problemi için en genel durumu ele almaktayız. Burada üretim fonksiyonunun fonksiyonel biçimini de açık bir şekilde yazmaktan vazgeçmekteyiz. Bununla beraber üretim fonksiyonunun bir kaç özelliğe sahip olmasını istemekteyiz. Bunlardan bir tanesi en az iki defa türevi alınan bir üretim fonksiyonu olması diğeri ise birinci türevinin pozitif (pozitif marjina ürün) ikinci türevinin negatif (azalan marjinal ürünler kanunu) olması.

Bu bilgiler ışığında firmanın kar maksimizasyonu problemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\max_x \pi = pf(x) - wx$$

Önceki durumlarda olduğu gibi kar maksimizasyonu için birinci sıra koşulunu elde etmemiz gerekir.

$$B.S.K \qquad \frac{d\pi}{dx} = p\frac{df(x)}{dx} - w$$

kar maksimizasyon için bu ifadeyi sıfıra eşitleyen x değerini bulmamız gerekir. Yani

$$p\frac{df(x)}{dx} - w = 0$$

ifadesini sağlayacak x optimal değeri bulmamız gereken değerdir. $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ tanımlamasını yaparsak yukarıdaki ifadeyi

$$pf'(x) - w = 0$$

Ne yazık ki üretim fonksiyonu bir önceki örnekte olduğu gibi verilmediğinden bu ifadeyi çözmek mümkün değildir. Bununla beraber birinci sıra koşulunu iktisaden yorumlamak mümkündür. Kar maksimizasyonu gerçekleştiren firma girdiye ödediği reel bedel girdinin marjinal ürününe eşittir. Yani $\frac{w}{p} = f'(x)$. Kar maksimizasyonu için gerekli olan ikinci sıra koşulu

$$\dot{I}.S.K \qquad \frac{d^2\pi}{dx^2} = pf'' < 0$$

olması gerekir. Üretim fonksiyonunu ikinci türevi negatif olduğundan bu koşul sağlanır.

Her ne kadar birinci sıra koşulu x için çözülemesede ikinci sıra koşulunun sağlandığı durumda x için optimal değerlerin modeldeki dışşal değişkenlerin örtük bir fonksiyonu olacağını ileri sürebiliriz (bu iddianın önceki durumlarla uyumlu olduğunu görmekte fayda var.) Kısaca birinci sıra koşulunu x için çözemesekte aşağıdaki gibi bir sonucun varlığını önerebiliriz.

$$x = x^*(w, p)$$

Bu öneriden sonra temel amacımız olan dışşal değişkenlerin içsel değişkenleri nasıl değiştirdiğini bulmak mümkün olur. Bunun için izlenecek yol bir anlamda mekaniksel sayılır. Bu çözüm önerileri birinci sıra koşuluna yerleştirilerek bir denklik elde edilir. Yani

$$pf'(x^*(w,p)) - w \equiv 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade w veya p değiştiğinde denkliği sağlayacak şekilde optimal x ve marjinal ürününün kendisini değiştireceğini söylemektedir. Satılan malın fiyatında meydana gelen değişikliğin optimal girdi miktarını nasıl değiştireceğini bulmak için yukarıdaki birinci sıra koşulunun p'ye göre toplam türevini alırız.

$$\begin{aligned} f'(x^*(w,p)) + pf''(x^*(w,p))\frac{\partial x^*}{\partial p} &= 0 \\ \frac{\partial x^*}{\partial p} &= -\frac{f'(x^*(w,p))}{pf''(x^*(w,p))} > 0 \end{aligned}$$

pay pozitif payda negatif ve önünde negatif işaret bulunduğundan ifade pozitiftir.Yani satılan malın fiyatının yükselmesi kullanılan optimal girdi miktarının artırmaktadır.

Girdinin fiyatındaki artışın optimal girdi üzerine etkisinin bulmak için

$$pf'(x^*(w,p)) - w \equiv 0$$

ifadesinin w'ye göre toplam türevini alırız.

$$\begin{aligned} f''(x^*(w,p))\frac{\partial x^*}{\partial w} - 1 &= 0 \\ \frac{\partial x^*}{\partial w} &= \frac{1}{pf''(x^*(w,p))} < 0 \end{aligned}$$

paydadaki ifade negatif olduğundan işaret negatif olmaktadır. Dolayısıyla girdinin fiyatındaki artış optimal girdi miktarını azaltmaktadır. Negatif eğimli girdi talep fonksiyonu sözkonusudur.

Görüldüğü gibi son durumda üretim fonksiyonunun türevleri üzerine koymuş olduğumuz kısıt karşılaştırmalı analiz yapmamız için yeterli olmaktadır. Son durumda mümkün olduğu kadar genel bir durum kapsanmış ve kar maksimizasyonu davranışı ile dışşal bir değişkenin içsel bir değişkeni nasıl etkilediğini bulmak mümkün olmuştur. İktisadi modellemede genel strateji son durumdakine benzerdir. Bu nedenle son duruma uygun modelleme ve onun doğurduğu sonuçları anlamak oldukça önemlidir. Biz derslerimizde zaman zaman her üç yöntemi kullanacak olsak da esas olan son yöntem olduğunu unutmamakta fayda bulunmaktadır.

1.2 İki girdi ve tek çıktı olması durumunda kar maksimizasyonu

$$\max_{x_1,x_2} \pi = pf(x_1,x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$$

kar maksimizasyonu için birinci sıra koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial x_1} &= pf_1(x_1,x_2) - w_1 = 0 \\
\frac{\partial \pi}{\partial x_2} &= pf_2(x_1,x_2) - w_2 = 0
\end{aligned}$$

notasyonda kolaylığı sağlamak amacıyla π_1 kar fonksiyonun birinci argumana göre, π_2 kar fonksiyonunun ikinci arguma göre türevini göstersin. Bu durumda π_{11}, π_{22} sırasıyla kar fonksiyonunun argumanlara göre ikinci türevlerini gösterir.

kar maksimizasyonunun gerçekten gerçekleşip gerçekleşmediğini görmek için ikinci sıra koşullar kontrol edilmesi gerekir. Maksimizasyon için ikinci türevlerin

$\pi_{11} < 0$, $\pi_{22} < 0$ ve $\pi_{11} * \pi_{22} - \pi_{12}^2 > 0$ koşulunu sağlaması gerekir.

bu durumda ikinci sıra koşullarını bulursak

$\pi_{11} = pf_{11}$, $\pi_{22} = pf_{22}$, $\pi_{12} = pf_{12}$ bu değerlerin yukarıdaki koşulları yerine getirmesi gerekir. fiyat kesinlikle pozitif bir değer olduğunda bu koşullar sırasıyla şunları ifade eder.

$\pi_{11} = f_{11} < 0$, $\pi_{22} = f_{22} < 0$, $f_{11} * f_{22} - f_{12}^2 > 0$ yada bu türevlerden oluşan Hessian matrisinin

$$H = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{bmatrix}$$

diagonal elemanlarının negatif determinantının sıfırdan büyük olması gerekir.

Yukarıdaki birinci sıra koşulları bizlere x lerin p ve w'lar cinsinden optimal değerlere sahip olacağını örtük olarak ifade eder. Diğer bir ifadeyle

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^*(w_1, w_2, p) \\ x_2 &= x_2^*(w_1, w_2, p) \end{aligned}$$

Bu çözüm değerlerini birinci sıra koşullarına yerleştirdiğimizde her w ve p değerleri için geçerli bir denklik elde ederiz.

$$\begin{aligned} pf_1(x_1^*(w_1, w_2, p), x_2^*(w_1, w_2, p)) - w_1 &\equiv 0 \\ pf_2(x_1^*(w_1, w_2, p), x_2^*(w_1, w_2, p)) - w_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

Bu sonucu kullanarak dışşal değişkenlerin optimal x değerlerini nasıl değiştirdiğini analiz edebiliriz. Yukarıdaki sistemden yararlanarak $\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}, \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}, \frac{\partial x_1^*}{\partial p}$ gibi etkileri hesaplayabiliriz.

$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}, \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}$ ifadelerinin işaretini bulabilmek için yukarıdaki özdeşliğin w1'e göre türevini alırız.

$$\begin{aligned} pf_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} + pf_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} - 1 &= 0 \\ pf_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} + pf_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} &= 0 \end{aligned}$$

matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1}$ ifadesini Cramer kuralı ile çözersek

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & pf_{12} \\ 0 & pf_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\overset{+}{p}\overset{-}{f_{22}}}{\underset{+}{p^2}\underset{+}{(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}} < 0$$

pay f_{22}'den dolayı negatif payda kar maksimizasyonu koşulundan dolayı pozitif olduğuna genel sonuç negatifdir. Dolayısıyla negatif eğimli bir girdi talep fonksiyonu sözkonusudur.

$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1}$ ifadesini Cramer kuralı ile çözersek

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial w_1} = \frac{\begin{vmatrix} pf_{11} & 1 \\ pf_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-\overset{+}{p}\overset{?}{f}_{21}}{\underset{+}{p^2}\underset{+}{(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

satılan malın fiyatının optimal girdiler üzerindeki etkisi

$\frac{\partial x_1^*}{\partial p}$ için

$$\begin{aligned} pf_1(x_1^*(w_1, w_2, p), x_2^*(w_1, w_2, p)) - w_1 &\equiv 0 \\ pf_2(x_1^*(w_1, w_2, p), x_2^*(w_1, w_2, p)) - w_2 &\equiv 0 \end{aligned}$$

ifadesinin p'ye göre toplam türevini alalım

$$\begin{aligned} pf_{11}\frac{\partial x_1^*}{\partial p} + pf_{12}\frac{\partial x_2^*}{\partial p} + f1 &= 0 \\ pf_{21}\frac{\partial x_1^*}{\partial p} + pf_{22}\frac{\partial x_2^*}{\partial p} + f_2 &= 0 \end{aligned}$$

matris formunda ifadeyi yazarsak

$$\begin{bmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p} \\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix}$$

sonucuna ulaşırız. $\frac{\partial x_1^*}{\partial p}$ ifadesini bulmak için Cramer kuralını kullanırsak

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} -f_1 & pf_{12} \\ -f_2 & pf_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-f_1pf_{22} + f_2p\overset{?}{f}_{12}}{\underset{+}{p^2}\underset{+}{(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

$\frac{\partial x_2^*}{\partial p}$ için ise

$$\frac{\partial x_2^*}{\partial p} = \frac{\begin{vmatrix} pf_{11} & -f_1 \\ pf_{21} & -f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} pf_{11} & pf_{12} \\ pf_{21} & pf_{22} \end{vmatrix}} = \frac{-f_2 pf_{11} + f_1 pf_{21}}{\underset{+}{p^2}(\underset{+}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2})} \overset{?}{\lessgtr} 0$$

görüldüğü üzere hem $\frac{\partial x_2^*}{\partial p}$ hem de $\frac{\partial x_1^*}{\partial p}$ ifadesinin işaretini belirlemek mümkün değildir. Örneğin satılan malın fiyatı arttığında optimal x_1 ve x_2 üzerindeki etkisini belirlemek mümkün değildir.Bununla birlikte her iki girdinin azalacağını söylemek iktisadi mantığımıza uygun gözükmemektedir. Satılan malın fiyatı arttığında her iki girdi artabilir, bir girdi artabilir diğer girdi azalabilir ama her iki girdi aynı anda azalamaz.