Tüketici perspektifinden iki problem
$\underset{x_1,x_2}{Max}\ U = U(x_1, x_2)$ kısıt $M = p_1x_1 + p_2x_2$ $\underset{x_1,x_2}{Min}\ M = p_1x_1 + p_2x_2$ kısıt $U_0 = U(x_1, x_2)$
bu iki problem arasındaki ilişki nedir.
bu problemlerin çözümleri

$$\begin{array}{ll} x_1^M(p_1, p_2, M) & x_1^U(p_1, p_2, U) \\ x_2^M(p_1, p_2, M) & x_2^U(p_1, p_2, U) \\ \lambda^M(p_1, p_2, M) & \lambda^U(p_1, p_2, U) \end{array}$$

sol taraftakiler faydayı maksimize eden talep fonksiyonları sağ taraftakiler ise harcamayı minimize eden talep fonksiyonlarıdır. Harcama fonksiyonu tanım olarak

$$M(p_1, p_2, U) = p_1x_1^U(p_1, p_2, U) + p_2x_2^U(p_1, p_2, U)$$

ifadesine eşittir. Harcama fonksiyonu üzerinden analiz özellikle refah araştırmaları için önemlidir. iki problem için lagrangre fonksiyonu
$\underset{x_1,x_2,\lambda}{Max}\ L = U(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$ $\underset{x_1,x_2,\lambda}{Min}\ p_1x_1 + p_2x_2\lambda(U_0 - U(x_1, x_2))$ bu problemlerin birinci sıra koşulları

$$\begin{array}{ll} L_1 = U_1 - \lambda p_1 = 0 & L_1 = p_1 - \lambda U_1 = 0 \\ L_2 = U_2 - \lambda p_2 = 0 & L_1 = p_2 - \lambda U_2 = 0 \\ L_\lambda = M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 & L_\lambda = U_0 - U(x_1, x_2) = 0 \end{array}$$

maksimizasyon ve minimizasyona ilişkin birinci sıra koşulları lagrangre çarpanı için şu ifadeyi göstermektedir.

$$\begin{aligned} \text{maksimizasyon için } \lambda^M &= \frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} \\ \text{minimizasyon için } \lambda^U &= \frac{p_1}{U_1} = \frac{p_2}{U_2} \end{aligned}$$

Buradan hareketle iki lagrange çarpanı arasındaki ilişki $\lambda^M = \frac{1}{\lambda^U}$ $.\lambda^U$ faydanın marjinal maliyetini ifade etmektedir. Birinci sıra koşulları
Harcama fonksiyonu kullanarak

$$\frac{\partial M(p_1, p_2, U)}{\partial p_1} = x_1^U(p_1, p_2, U)$$

elde ederiz. Bu fonksiyonun ikinci türevini aldığımızda

$$\frac{\partial^2 M(p_1, p_2, U)}{\partial p_1^2} = \frac{\partial x_1^U(p_1, p_2, U)}{\partial p_1} < 0$$

net ikame etkisidir.Dolaylı fayda fonksiyonunu kullandığımızda

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_1} = -\lambda^M x^M$$

ifadesine ulaşıyoruz. harcama fonksiyon ise $M(p_1, p_2, U)$ ile gösterilmektedir. Biz bu harcama fonksiyonunu marshallgil fonksiyonuna yerleştirirsek

$$x_1^M(p_1, p_2, M(p_1, p_2, U)) \equiv x_1^U(p_1, p_2, U)$$

sonucunu elde ederiz. Denkliği tekrardan aşağıdaki biçimde yazalım

$$x_1^U(p_1, p_2, U) \equiv x_1^M(p_1, p_2, M(p_1, p_2, U))$$

ve birinci mal fiyatına göre türevini alalım.

$$\frac{\partial x_1^U(p_1,p_2,U)}{\partial p_1} \equiv \frac{x_1^M(p_1,p_2,M(p_1,p_2,U))}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1^M}{\partial M}\frac{M(p_1,p_2,U)}{\partial p_1}$$

ikinci terimin son ifadesi talep fonksiyonuna eşit olduğundan ifadeyi önce

$$\frac{\partial x_1^U(p_1,p_2,U)}{\partial p_1} \equiv \frac{x_1^M(p_1,p_2,M(p_1,p_2,U))}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1^M}{\partial M}x_1^M$$

şeklinde sonra da

$$\frac{x_1^M(p_1,p_2,M(p_1,p_2,U))}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^U(p_1,p_2,U)}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1^M}{\partial M}x_1^M$$

biçiminde yazabiliriz. bu yazdığımız son ifade Slutsky denklemi olarak adlandırılmaktadır.

Aynı sonucu hickgil ve marshallgil talep fonksiyonlarını arasındaki ilişkiyi aşağıda kurup elde etmekte mümkündür.

$$x_1^M(p_1,p_2,M) \equiv x_1^U(p_1,p_2,U^*(p_1,p_2,M))$$

bu son denklemin p_1'e göre türevini aldığımızda

$$\frac{\partial x_1^M(p_1,p_2,M)}{\partial p_1} \equiv \frac{\partial x_1^U(p_1,p_2,U^*(p_1,p_2,M))}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1^U}{\partial U}\frac{U^*(p_1,p_2,M)}{\partial p_1}$$

denklemde$\frac{U^*(p_1,p_2,M)}{\partial p_1} = -\lambda^M x_1^M$ olduğundan

$$\frac{\partial x_1^M(p_1,p_2,M)}{\partial p_1} \equiv \frac{\partial x_1^U(p_1,p_2,U^*(p_1,p_2,M))}{\partial p_1} - x_1^M(\frac{\partial x_1^U}{\partial U}\lambda^M)$$

$x_1^M(p_1,p_2,M) \equiv x_1^U(p_1,p_2,U^*(p_1,p_2,M))$ ifadesini M'ye türevini alırsak

$$\frac{\partial x_1^M(p_1,p_2,M)}{\partial M} \equiv \frac{\partial x_1^U(p_1,p_2,U^*(p_1,p_2,M))}{\partial U}\frac{\partial U^*}{\partial M}$$

$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \lambda^M$ olduğunda ifadeyi kısa biçimde

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial M} = \frac{\partial x_1^U}{\partial U}\lambda^M$$

yazabiliriz. Bunu denklemde yerine yerleştirdiğimizde Slutsky denklemine ulaşırız.

$$\frac{\partial x_1^M(p_1,p_2,M)}{\partial p_1} \equiv \frac{\partial x_1^U(p_1,p_2,U^*(p_1,p_2,M))}{\partial p_1} - x_1^M\frac{\partial x_1^M}{\partial M}$$