Hasan Şahin

Matematiksel İktisat Ders Notları

0.1 Tüketici Teorisi: Karşılaştırmalı Durağanlık Analizi

Fayda maksimizasyonu

max $U(x_1, x_2)$, $p_1x_1 + p_2x_2 = M$ kısıtı altında. Yapılacak ilk iş Lagrange fonksiyonunu oluşturmaktır.

$$L = U(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$$

maksimizasyon için birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned} L_1 &= U_1(x_1, x_2) - \lambda p_1 = 0 \\ L_2 &= U_2(x_1, x_2) - \lambda p_2 = 0 \\ L_\lambda &= M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{aligned}$$

bu problemin çözümü için ikinci sıra koşullarını içeren çitlenmiş Hessian matrisi

$$H = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

bu matrisin determinantının sıfırdan büyük olması gerekir. Eğer bu koşul yerine gelirse faydayı maksimize edecek değerleri dışşal değişkenler cinsinden yazabiliriz.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^M(p_1, p_2, M) \\ x_2 &= x_2^M(p_1, p_2, M) \\ \lambda &= \lambda_1^M(p_1, p_2, M) \end{aligned}$$

bu çözümler birinci sıra koşuluna yerleştirdiğimizde

$$\begin{aligned}
L_1 &= U_1(x_1^M(p_1,p_2,M), x_2^M(p_1,p_2,M)) - \lambda^M(p_1,p_2,M)p_1 = 0 \\
L_2 &= U_2(x_1^M(p_1,p_2,M), x_2^M(p_1,p_2,M)) - \lambda^M(p_1,p_2,M)p_2 = 0 \\
L_\lambda &= M - p_1x_1^M(p_1,p_2,M) - p_2x_2^M(p_1,p_2,M) = 0
\end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. Artık bu sistemi kullanarak karşılaştırmalı durağan analiz gerçekleştirebiliriz. Öncelikle gelirdeki değişikliğin etkisini bulmaya çalışalım. bu amaçla yukarıdaki sistemin M'ye toplam türevini alalım.

$$\begin{aligned}
U_{11}\frac{\partial x_1^M}{\partial M} + U_{12}\frac{\partial x_2^M}{\partial M} - \frac{\partial \lambda^M}{\partial M}p_1 &= 0 \\
U_{21}\frac{\partial x_1^M}{\partial M} + U_{22}\frac{\partial x_2^M}{\partial M} - \frac{\partial \lambda^M}{\partial M}p_2 &= 0 \\
1 - \frac{\partial x_1^M}{\partial M}p_1 - \frac{\partial x_2^M}{\partial M}p_2 &= 0
\end{aligned}$$

ifadeyi matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^M}{\partial M} \\ \frac{\partial x_2^M}{\partial M} \\ \frac{\partial \lambda^M}{\partial M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

birinci mal üzerine etkisi için Cramer yöntemi ile

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial M} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & U_{12} & -p_1 \\ 0 & U_{22} & -p_2 \\ -1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{-1(-1)^{1+3}(-p_2\overset{?}{U}_{12} + U_{22}p1)}{H}$$

payda pozitif olmasına rağmen. payın içerdiği U_{12} değerine bir işaret getiremediğimizden sonuç belirsizdir.

ikinci mal için benzer şekilde

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial M} = \frac{\begin{bmatrix} U_{11} & 0 & -p_1 \\ U_{21} & 0 & -p_2 \\ -p_1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}{H} = \frac{-1(-1)^{2+3}(-p_2U_{12} + U_{21}p_1)}{H}$$

yine belirsiz.

$$\frac{\partial \lambda^M}{\partial M} = \frac{\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 \\ -p_1 & -p_2 & -1 \end{bmatrix}}{H} = \frac{-1(-1)^{3+3}(U_{11}U_{22} - U_{21}U_{21})}{H}$$

bu son ifadenin de işareti belirsiz. Dolayısıyla gelirin mallar ve gelirin marjinal faydası üzerine etkisi belirsizdir. bu sonuçlara göre gelir arttıkça bir maldan talep edilen miktar azalabilmektedir. Diğer bir deyişle düşük mal sözkonusudur. Bununla beraber

$$1 - \frac{\partial x_1^M}{\partial M}p_1 - \frac{\partial x_2^M}{\partial M}p_2 = 0$$

ifadesini düzenlediğimizde elde ettiğimiz sonuç

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial M}p_1 + \frac{\partial x_2^M}{\partial M}p_2 = 1$$

her iki malın aynı anda düşük mal olamayacağını göstermektedir. Fiyatlar pozitif olduğundan her iki malın düşük mal olması sözkonusu değildir.

Şimdi birinci malın fiyat üzerindeki etkisini ele alalım. bunun için yine yukarıdaki sistemin toplam türevselini alırız.

$$\begin{aligned}
U_{11}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} + U_{12}\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} - \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_1}p_1 - \lambda^M &= 0 \\
U_{21}\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} + U_{22}\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} - \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_1}p_2 &= 0 \\
-\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1}p_1 - x_1^M - \frac{\partial x_2^M}{\partial p_1}p_2 &= 0
\end{aligned}$$

matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} \\ \frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} \\ \frac{\partial \lambda^M}{\partial p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^M \\ 0 \\ x_1^M \end{bmatrix}$$

birinci mal üzerindeki etkisi

$$\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^M & U_{12} & -p_1 \\ 0 & U_{22} & -p_2 \\ x_1^M & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\lambda^M(-1)^{1+1}(-p_2^2) + x_1^M(-1)^{3+1}(-p_1U_{12} + U_{22}p1)}{H}$$

ilk terim negatif olmakla beraber ikinci terimin işareti belirsiz. bu nedenle ilgili değer belirsizdir.

ikinci mal üzerindeki etkisi

$$\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} = \frac{\begin{vmatrix} U_{11} & \lambda^M & -p_1 \\ U_{21} & 0 & -p_2 \\ -p_1 & x_1^M & 0 \end{vmatrix}}{H} = \frac{\lambda^M(-1)^{1+2}(p_1p_2) + x_1^M(-1)^{3+2}(U_{11}p_2 - U_{21}p1)}{H}$$

yine belirsiz.

son olarak

$$\frac{\partial \lambda_2^M}{\partial p_1} = \frac{\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \lambda^M \\ U_{21} & U_{22} & 0 \\ -p_1 & -p_2 & x_1^M \end{vmatrix}}{H} = \frac{\lambda^M(-1)^{1+3}(-p_2U_{12} + p_1U_{22}) + x_1^M(-1)^{3+3}(U_{11}U_{22} - U_{21}U_{12})}{H}$$

son sonuçta belirsizdir. Bununla beraber

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} &= \frac{\lambda^M(-1)^{1+1}(-p_2^2)+x_1^M(-1)^{3+1}(-p_1U_{12}+U_{22}p1)}{H} \\
\frac{\partial x_2^M}{\partial p_1} &= \frac{\lambda^M(-1)^{1+2}(p_1p_2)+x_1^M(-1)^{3+2}(U_{11}p_2-U_{21}p1)}{H}
\end{aligned}
$$

ifadesenin birinci ve ikinci terimleri ele alanıp düzenlendiğinde aşağıdaki gibi bir sonuç elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_1^M}{\partial p_1} &= \frac{\partial x_1^U}{\partial p_1} - x_1^M \frac{\partial x_1^M}{\partial M} \\
\frac{\partial x_1^M}{\partial p_2} &= \frac{\partial x_1^U}{\partial p_1} - x_1^M \frac{\partial x_2^M}{\partial M}
\end{aligned}
$$

bu denklemler Slutsky denklemi olarak adlandırılmaktadır. Genel olarak Slutsky Denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$
\frac{\partial x_i^M}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i^U}{\partial p_j} - x_j^M \frac{\partial x_i^M}{\partial M}
$$

Slutksy denklemi faydasını maksimize eden tüketicinin fiyattaki değişime verdiği cevabın iki parçaya ayrıldığını göstermektedir. birinci kısım ikame etkisi ikinci kısımda gelir etkisi.

Harcama minimizasyonu ve fayda maksimizasyonu ilişkisi

min $M = p_1x_1 + p_2x_2$ kısıtı altında $U(x_1, x_2) = U_0$,

$$
L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(U_0 - U(x_1, x_2))
$$

birinci sıra koşulları

$$
\begin{aligned}
L_1 &= p_1 - \lambda U_1(x_1, x_2) = 0 \\
L_2 &= p_2 - \lambda U_2(x_1, x_2) = 0 \\
L_\lambda &= U_0 - U(x_1, x_2) = 0
\end{aligned}
$$

ikinci sıra koşulları

$$H = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{1\lambda} \\ L_{21} & L_{22} & L_{2\lambda} \\ L_{\lambda 1} & L_{\lambda 2} & L_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda U_{11} & -\lambda U_{12} & -U_1 \\ -\lambda U_{21} & -\lambda U_{22} & -U_2 \\ -U_1 & -U_2 & 0 \end{bmatrix}$$

minimizasyon problemi için bordered hessian matrisinin determinantının sıfırdan küçük olması gerekir. Bu sağlandığı taktirde birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^U(p_1, p_2, U_0) \\ x_2 &= x_2^U(p_1, p_2, U_0) \\ \lambda &= \lambda_1^U(p_1, p_2, U_0) \end{aligned}$$

sonucunu vermektedir. $x_i = x_i^U(p_1, p_2, U_0)$ telefi edilmiş talep fonksiyonu olarak veya Hicksgil talep fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır. Marshalgil talep fonksiyonu hatırlanacağı üzere $x_i = x_i^M(p_1, p_2, M)$ biçiminde ifade edilmektedir. Hicksgil talep fonksiyonun fiyatlara göre kısmı türevleri bize saf ikame etkisini vermektedir. Hicksgil talep fonksiyonunu amaç fonksiyonunu içine yerleştirdiğimizde harcama fonksiyonunu elde ederiz.

$$M^*(p_1, p_2, U_0) = p_1 x_1^U(p_1, p_2, U_0) + p_2 x_2^U(p_1, p_2, U_0)$$

örnek $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ olduğunda

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \lambda(U_0 - x_1 x_2)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= p_1 - \lambda x_2 = 0 \\ L_2 &= p_2 - \lambda x_1 = 0 \\ L_\lambda &= U_0 - x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

İlk iki sıra koşulu

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda x_2}{\lambda x_1}$$

buradan

$$x_2 = \frac{p_1 x_1}{p_2}$$

sonucunu elde ederiz. Bunu kısıtta yerine koyduğumuzda

$$\begin{aligned}
U_0 &= x_1(\frac{p_1 x_1}{p_2}) \\
\frac{p_1 x_1^2}{p_2} &= U_0 \\
x_1^2 &= U_0 \frac{p_2}{p_1} \\
x_1^U &= \sqrt{U_0 \frac{p_2}{p_1}}
\end{aligned}$$

benzer işlemleri diğer mal için yaptığımızda

$$x_2^U = \sqrt{U_0 \frac{p_1}{p_2}}$$

sonucunu elde ederiz.Bu iki fonksiyonu bütçe kısıtına yerleştirdiğimizde Harcama fonksiyonunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
M^*(p_1, p_2, U_0) &= p_1 \sqrt{U_0 \frac{p_2}{p_1}} + p_2 \sqrt{U_0 \frac{p_1}{p_2}} \\
&= p_1 U_0^{0.5} p_2 p_1^{-0.5} + p_2 U_0 p_1^{0.5} p_2^{-0.5} \\
&= U_0^{0.5} p_2^{0.5} p_1^{0.5} + p_2^{0.5} U_0^{0.5} p_1^{0.5} \\
&= 2U_0^{0.5} p_2^{0.5} p_1^{0.5}
\end{aligned}$$

Örnek

$$U = x_1 x_2 + 2x_1$$

kısıt

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = M$$

Lagrange

$$L = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$$

birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned} L_1 &= x_2 + 2 - \lambda p_1 = 0 \\ L_1 &= x_1 - \lambda p_2 = 0 \\ L_\lambda &= M - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \end{aligned}$$

ilk birinci sıra koşulundan

$$\lambda = \frac{x_2 + 2}{p_1}$$

ikinci birinci sıra koşulundan

$$\lambda = \frac{x_1}{p_2}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{x_2 + 2}{p_1} &= \frac{x_1}{p_2} \\ x_1 &= \frac{p_2(x_2 + 2)}{p_1} \end{aligned}$$

son ifadeyi bütçe kısıtında yerine koyarsak

$$\begin{aligned} M - p_1\left[\frac{p_2(x_2 + 2)}{p_1}\right] - p_2x_2 &= 0 \\ M - p_2(x_2 + 2) - p_2x_2 &= 0 \\ M - p_2(x_2 + 2) - p_2x_2 &= 0 \\ M - 2p_2 &= 2p_2x_2 \\ x_2 &= \frac{M - 2p_2}{2p_2} \\ x_2^* &= \frac{M}{2p_2} - 1 \end{aligned}$$

son ifade bize faydayı maksimize eden talep fonksiyonunu vermektedir. Optimal x_2'yi bütçe kısıtına koyup x_1 için çözersek birinc mal için talep fonksiyonunu buluruz.

$$\begin{aligned}
M - p_1 x_1 - p_2 \left[\frac{M}{2p_2} - 1\right] &= 0 \\
M &= p_1 x_1 + \frac{M}{2} - p_2 \\
M - \frac{M}{2} + p_2 &= p_1 x_1 \\
\frac{0.5M + p_2}{p_1} &= x_1 \\
x_1^* &= \frac{0.5M + p_2}{p_1}
\end{aligned}$$

birinci malın fiyatındaki değişmenin optimal x_1^* üzerine etkisi

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{-(0.5M + p_2)}{p_1^2} < 0$$

Örnek

$$U = x_1 x_2$$

kısıt

$$120 = x_1 + 4x_2$$

altında a) optimal x_1, x_2,ve λ değerleri bulunuz b) bütçedeki 1 birimlik artışın etkisini hesaplayınız.

Lagrange

$$L = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda(120 - x_1 - 4x_2)$$

birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned}
L_1 &= x_2 - \lambda = 0 \\
L_1 &= x_1 - 4\lambda = 0 \\
L_\lambda &= 120 - x_1 - 4x_2 = 0
\end{aligned}$$

ilk birinci sıra koşulundan $\lambda = x_2$, ikinci birinci sıra koşulunda kullandığımızda $x_1 - 4x_2 = 0$

buradan $x_1 = 4x_2$ sonucunu elde ederiz. Bu sonucu bütçe kısıtında yerine koyarsak

$$\begin{aligned} 120 - 4x_2 - 4x_2 &= 0 \\ 8x_2 &= 120 \\ x_2 &= \frac{120}{8} \\ x_2^* &= 15 \end{aligned}$$

buradan hareketle

$$x_1^* = 4 * 15 = 60$$

ve $\lambda = x_2$ olduğundan dolayı $\lambda^* = 15$. Bu değerlerde optimal fayda düzeyi

$$U^* = 60 * 15 = 900$$

b) bütçedeki 1 birimlik artışın etkisi $\lambda^* = 15$. Bir birimlik bir bütçe artışı faydayı 15 birim artıracaktır.