Ankara Üniversitesi, Siyasal Bilgiler Fakültesi

Prof. Dr. Hasan Şahin

0.1 Zarf Teoremi (Envelope Teorem)

Bu kısımda zarf teoremini ve iktisatta nasıl kullanıldığını ele alacağız. bu bölüm Chiang 13.5 üzerine kuruludur.

0.1.1 Kısıtsız optimizasyon için zarf teoremi

İki tercih değişkeni, x ve y ile bir parametrenin,ϕ, (ϕ bir vektör olarak da düşünülebilir.) olduğu bir maksimizasyon probleminin aşağıdaki gibi ifade edildiğini varsayalım.

$$\underset{x,y}{Max} \quad U = f(x, y, \phi)$$

$f(x, y, \phi)$ fonksiyonu direkt amaç fonskiyonu veya sadece amaç fonksiyonu olarak adlandırılır. Kar maksimizasyonu gerçekleştirdiğimzde kar fonksiyonu ($\pi = pf(x_1, x_2) - w_1x_1 - w_2x_2$) direkt amaç fonksiyonuna bir örnektir. Bu kar maksimizasyon probleminde $\phi = [p, w_1, w_2]$ üç elamanlı bir vektördür.

Yukarıdaki maksimizasyon problemi için birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned} f_x(x, y, \phi) &= 0 \\ f_y(x, y, \phi) &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. İkinci sıra koşullarının sağlanması durumuda bu iki denklem iki bilinmeyen x, y değerleri için çözülür. Zımni çözüm

$$x^* = x^*(\phi) \qquad\qquad y^* = y^*(\phi)$$

biçiminde ifade edilir. Bu çözüm sonuçlarını amaç fonksiyonuna yerleştirdiğimizde parametre cinsinden yeni bir fonksiyon elde ederiz. Bu fonksiyona dolaylı amaç fonksiyonu adını veririz. Elimizde örnek için dolaylı fayda fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$V(\phi) = f(x^*(\phi)\ , y^*(\phi), \phi)$$

Bu fonksiyon her bir ϕ değeri için $f(x, y, \phi)$ fonksiyonunun maksimum olduğu değeri verecektir. Bu $V(\phi)$ fonksiyon maksimum değer fonksiyonu veya dolaylı amaç fonksiyonu ismini almaktadır. Dolaylı amaç fonksiyonunun ϕ'ye göre türevini alırsak

$$\frac{dV}{d\phi} = f_x \frac{\partial x^*}{\partial \phi} + f_y \frac{\partial y^*}{\partial \phi} + f_\phi$$

ifadesine ulaşırız. Burada parametrenin değişmesinin dolaylı amaç fonksiyonu üzerindeki etkisini görmekteyiz. Bu etki üç parçadan oluşmaktadır. İki parçası dolayı etkiyi üçüncü parçada direkt etkiyi göstermektedir. ϕ değiştikçe ϕ bu değişim etkisini dolaylı amaç fonkisyonu üzerinde sadece direkt göstermeyecek aynı zamanda x ve y değerlerini değiştirerek dolaylı olarak gösterecektir. Fakat **optimal değerlerde** $f_x = 0$ ve $f_y = 0$ olacağından sonuç

$$\frac{dV}{d\phi} = f_\phi$$

olacaktır. Bu optimal değerde parametrenin dolaylı amaç fonksiyonu üzerindeki etkisinin parametrenin direkt amaç fonksiyonu üzerindeki etkisine eşit olduğunu göstermektedir. *Bu sonuç ϕ değişirken optimal x ve y değişerek dolaylı amaç fonksiyonunda meydana gelen değişimin x ve y'yi sabit tutarak ϕ nin değişmesinin f fonksiyonu üzerindeki etkisine eşit olduğunu göstermektedir.*

Zarf teoremi sadece dışşal değişkenin değişiminin direkt etkisinin dikkate alınmasının yeterli olacağını söyleyen bir teoremdir. Bu anlamda dışşal değişkenler dolaylı olarak fonksiyona girmiş olsalar bile önemi yoktur.

Kar Fonksiyonu Örneği

Sermaye ve işgücünü üretimde kullanan tam rekabetçi firmanın kar fonksiyonu (direkt amaç fonksiyonu) aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

p fiyatın w ücreti r sermayi kiralama maliyetini f ise klasik özelliklere sahip bir üretim fonksiyonunu göstermektedir. Maksimizasyon için birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned} \pi_L &= pf_L(K, L) - w = 0 \\ \pi_K &= pf_K(K, L) - r = 0 \end{aligned}$$

ikinci sıra koşullarının sağlanması durumunda girdi talep fonksiyonlarını elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} L^* &= L^*(w, r, p) \\ K^* &= K^*(w, r, p) \end{aligned}$$

bu çözümleri kar fonksiyonunda yerine koyarsak

$$\pi^*(w, r, p) = pf(K^*(w, r, p), L^*(w, r, p)) - wL^*(w, r, p) - rK^*(w, r, p)$$

dolaylı kar fonksiyonunu etmiş oluruz. Şimdi ücretteki değişikliğin kar üzerindeki etkisini analiz edelim. Eğer direkt amaç fonksiyonunun ücrete göre türevini alırsak

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -L$$

sonucuna ulaşırız. Burada firmanın kar maksimizasyonu davranışı dikkate alınmamaktadır. Sonuç firmanın ücretteki değişiklikten dolayı yapabileceği değişiklikleri dikkate almamaktadır. Ücret değiştiğinde firma hem sermaye hem de işgücü miktarını karı maksimize etmek için değiştirecektir. Buna karşılık $\pi^*(w, r, p)$ fonksiyonunda bu durum dikkate alınmaktadır. $\pi^*(w,r,p)$ fonksiyonunda ücretten kaynaklanan değişikliği bulmak için ücrete göre türevini alırız.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi^*(w,r,p)}{\partial w} &= pf_K\frac{\partial K^*}{\partial w} + pf_L\frac{\partial L^*}{\partial w} - w\frac{\partial L^*}{\partial w} - L^*(w,r,p) - r\frac{\partial K^*}{\partial w} \\ &= (pf_K - r)\frac{\partial K^*}{\partial w} + (pf_L - w)\frac{\partial L^*}{\partial w} - L^*(w,r,p)\end{aligned}$$

son eşitlikteki parentez içi değerler optimum değerlerde sıfır olduğu için

$$\frac{\partial \pi^*(w,r,p)}{\partial w} = -L^*(w,r,p)$$

ifadesini elde ederiz.Bu sonuç karın maksimize edildiği noktada ücretten kaynaklanan kar değişikliğini hesaplamak için üretim faktörlerini değiştirmenin veya değiştirmemenin bir etkisi olmadığını göstermektedir. Bu sonuç kar fonksiyonunun (dolaylı amaç fonksiyonunun)ücrete göre türevinin işgücü talep fonksiyonunun negatifine eşit olduğunu göstermektedir. dolaylı ve direkt amaç fonksiyonaları arasındaki ilişkiyi zarf teoremi kapsamında aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\frac{\partial \pi^*(w,r,p)}{\partial w} = -L^*(w,r,p) = \frac{\partial \pi}{\partial w}|_{L=L^*}$$

Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde r ve p'nin etkilerini elde edebiliriz.

$$\frac{\partial \pi^*(w,r,p)}{\partial r} = -K^*(w,r,p)$$

$$\frac{\partial \pi^*(w,r,p)}{\partial p} = f(K^*,L^*)$$

dolaylı kar fonksiyonun w, r, p'ye göre türevlerinin sonucu Hotelling' lemma olarak bilinmektedir.

0.1.2 Karşılıklık Koşulu

Kısıtsız optimazyona ilişkin fonksiyonu tekrar yazarsak

$$\underset{x,y}{Max} \;\; U = f(x,y,\phi)$$

bu problem ilişkin birinci sıra koşulları $f_x = f_y = 0$'dır. Daha önce de ifade ettiğimiz gibi ikinci sıra koşulları sağlanırsa çözüm $x^* = x^*(\phi)$, $y^* = y^*(\phi)$ şeklinde yazılabilecektir. Bu çözüm amaç fonksiyonuna yerleştirilence dolaylı amaç fonksiyonu elde edilmiş olacaktır.

$$V(\phi) = f(x^*(\phi)\;, y^*(\phi), \phi)$$

tanım olarak her bir ϕ değeri için $V(\phi)$ fonksiyonu en yüksek değeri verecektir.Şimdi yeni bir fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyon amaç fonksiyonu ile dolaylı amaç fonksiyonu arasındaki farkı göstermektedir.

$$\Omega(x,y,\phi) = f(x,y,\phi) - V(\phi)$$

bu yeni fonksiyonun alabileceği en büyük değer sıfırdır. Bu sıfır değerine $x = x^*$, $y = y^*$ değerlerinde ulaşılır. Bunun dışındaki değerlerde $f(x, y, \phi) < V(\phi)$ eşitliği geçerli olacaktır. Bu tanımlamada $\Omega(x, y, \phi)$ fonksiyonu üç değişkenli bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Bu fonksiyonu maksimum yapabilmek için birinci sıra koşulları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$
\begin{aligned}
\Omega_x(x, y, \phi) &= f_x(x, y, \phi) = 0 \\
\Omega_y(x, y, \phi) &= f_y(x, y, \phi) = 0 \\
\Omega_\phi(x, y, \phi) &= f_\phi(x, y, \phi) - V_\phi(\phi) = 0
\end{aligned}
$$

Birinci sıra koşullarına dikkatlice bakınca ilk iki koşul $f(x, y, \phi)$ fonksiyonunu maksimize etmek için gerekli olan koşullar son koşulda zarf teoremine ilişkin koşuldur. İkinci sıra koşulları Hessian matrisinin

$$
H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{x\phi} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{y\phi} \\ f_{\phi x} & f_{\phi y} & f_{\phi\phi} - V_{\phi\phi} \end{vmatrix}
$$

elamanlarının aşağıdaki özellikleri sağlaması durumunda gerçekleşecektir.

$$
f_{xx} < 0, \quad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0, \quad H < 0.
$$

eğer Hessian matrisini oluştururken sıralamayı aşağıdaki biçimde yapsaydık

$$
H = \begin{vmatrix} f_{\phi\phi} - V_{\phi\phi} & f_{\phi x} & f_{\phi y} \\ f_{x\phi} & f_{xx} & f_{xy} \\ f_{y\phi} & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}
$$

matrisinden maksimizasyon için $f_{\phi\phi} - V_{\phi\phi} < 0$ koşulunun sağlanması gerekir. Bu ifadeyi biraz daha detaylı ele alıp inceleyelim. Bunun nedeni karşılaştırmalı analizde işe yarayacak sonuç yaratmasıdır.

$$
V_\phi(\phi) = f_\phi(x^*(\phi), y^*(\phi), \phi)
$$

$$
\begin{aligned}
V_{\phi\phi} &= f_{\phi x}\frac{\partial x^*}{\partial \phi} + f_{\phi y}\frac{\partial y^*}{\partial \phi} + f_{\phi\phi} \\
V_{\phi\phi} - f_{\phi\phi} &= f_{\phi x}\frac{\partial x^*}{\partial \phi} + f_{\phi y}\frac{\partial y^*}{\partial \phi} > 0
\end{aligned}
$$

Youngs teoremini kullanarak ifadeyi tekrardan aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$
V_{\phi\phi} - f_{\phi\phi} = f_{x\phi}\frac{\partial x^*}{\partial \phi} + f_{y\phi}\frac{\partial y^*}{\partial \phi} > 0
$$

diyelim ki ϕ sadece x'in birinci sıra koşulunda bulunsun. Bu durumda $f_{y\phi} = 0$ olacaktır. Bu durumda ise yukarıdaki ifadeyi

$$
f_{x\phi}\frac{\partial x^*}{\partial \phi} > 0
$$

biçiminde yazmak mümkün olacaktır. Bu durumda eğer ϕ sadece x'in birinci sıra koşulunda gözüküyorsa $f_{x\phi}$ 'in işaretini amaç fonksiyonundan $U = f(x, y, \phi)$ elde ettiğimiz durumda $\frac{\partial x^*}{\partial \phi}$'in işaretini belirleme şansımız bulunmaktadır.

Kar maksimizasyonu probleminde kullandığımız denklem ve birinci sıra koşulları sırasıyla aşağıdaki gibidir

$$\pi = pf(K, L) - wL - rK$$

$$\begin{aligned} \pi_L &= pf_L(K, L) - w = 0 \\ \pi_K &= pf_K(K, L) - r = 0 \end{aligned}$$

Burada dışşal değişken w birinci sıra koşullarından sadece bir tanesinde gözükmektedir ve bu birinci sıra koşulunun w göre türevi

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial w} = -1$$

sonucunu vermektedir. Bu sonuç bize $\frac{\partial L^*}{\partial w}$ ifadesinin negatif olması gerektiğini göstermektedir.

Zarf teoremini Young's teorem ile birleştirdiğimizde karşılıklık koşulu (reciprocity condition) denen sonucu ulaşırız:

$$\frac{\partial L^*}{\partial r} = \frac{\partial K^*}{\partial w}$$

Dolaylı kar fonksiyonunu, $\pi^*(w, r, p)$, kullandığımızda Hotelling's Lemma

$$\begin{aligned} \pi^*_w &= \frac{\partial \pi^*}{\partial w} = -L^*(w, r, p) \\ \pi^*_r &= \frac{\partial \pi^*}{\partial r} = -K^*(w, r, p) \end{aligned}$$

bu sonucun tekrar türevini alıp Young ın teoremini kullanırsak

$$\begin{aligned} \pi^*_{wr} &= -\frac{\partial L^*(w, r, p)}{\partial r} \\ \pi^*_{rw} &= -\frac{\partial K^*(w, r, p)}{\partial w} \end{aligned}$$

dolayısıyla $\pi^*_{wr} = \pi^*_{rw}$ olduğundan

$$\frac{\partial L^*(w, r, p)}{\partial r} = \frac{\partial K^*(w, r, p)}{\partial w}$$

sonucuna ulaşırız. Bu bir simetri sonucunu göstermektedir. sermayenin maliyetinin işgücüne etkisi, ücretin sermaye üzerine etkisine eşittir.

0.1.3 Kısıtlı Optimizasyon için Zarf Teoremi

Amaç fonksiyonu bir önceki gibi fakat şimdi bir kısıtımız olsun ve kısıt aşağıdaki gibi ifade edilsin

$$g(x, y, \phi) = 0$$

Bu durumda problemi

$$\underset{x,y}{Max} \quad U = f(x, y, \phi) \text{ kısıt } g(x, y, \phi) = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu problemin Lagrange fonksiyonu

$$Z = f(x, y, \phi) + \lambda[0 - \ g(x, y, \phi)]$$

birinci sıra koşulları

$$\begin{aligned} Z_x &= f_x - \lambda g_x = 0 \\ Z_y &= f_y - \lambda g_y = 0 \\ Z_\lambda &= \lambda g_\lambda = 0 \end{aligned}$$

bu sistemi çözdüğümüzde

$$x = x^*(\phi), \ y = y^*(\phi), \ \lambda = \lambda^*(\phi)$$

sonuçlarını elde ederiz. Bu çözümü amaç fonksiyonuna yerleştirdiğimizde ise dolaylı amaç fonksiyonu elde edilir.

$$U = f(x^*(\phi), y^*(\phi), \phi) = V(\phi)$$

sorumuz? ϕ değiştiğinde $V(\phi)$ nasıl değişir. Bunu bulmak için V nin ϕ'ye göre türevini alırız

$$\frac{dV}{d\phi} = f_x \frac{\partial x^*}{\partial \phi} + f_y \frac{\partial y^*}{\partial \phi} + f_\phi$$

buradak kısıtlı optimizasyonla uğraştığımız için f_x f_y sıfıra eşit olmak zorunda değil. bununla beraber kısıtının türevini alıp bu fonksiyona yerleştirirsek farklı bir sonuç elde ederiz. Önce kısıtı denklik halinde yazarsak

$$g(x^*(\phi), y^*(\phi), \phi) \equiv 0$$

sonra türevini alırsak

$$g_x \frac{\partial x^*}{\partial \phi} + g_y \frac{\partial y^*}{\partial \phi} + g_\phi = 0$$

ifadelerine ulaşırız. Son elde ettiğimiz ifadeyi λ ile çarparsak ve bunu yukarıdaki denkleme yerleştirirsek

$$\frac{dV}{d\phi} = (f_x - \lambda g_x) \frac{\partial x^*}{\partial \phi} + (f_y - \lambda g_y) \frac{\partial y^*}{\partial \phi} + f_\phi - \lambda g_\phi = Z_\phi$$

sonuç kısaca

$$\frac{dV}{d\phi} = Z_\phi$$

biçiminde yazılır. Bu sonuç kısıtlı optimizasyon durumunda zarf teoremini ifade eder. Sonuç kısıtsız optimizasyona paraleldir. Eşitliğin sağındaki türev optimal değerde hesaplanmalıdır.

Örnek : (Jehle ve Reny'den)

Amaç fonksiyonunu $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $a - 2x_1 - 4x_2 = 0$ kısıtı altında optimal değerlerini bulalım.

$$L = x_1 x_2 + \lambda(a - 2x_1 - 4x_2)$$

birinci sıra koşuları sırasıyla

$$\begin{aligned} L_1 &= x_2 - 2\lambda = 0 \\ L_2 &= x_1 - 4\lambda = 0 \\ L_\lambda &= a - 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{aligned}$$

ilk birinci sıra koşuluna göre $\lambda = x_2/2$, ikinci sıra koşuluna göre $\lambda = x_1/4$ dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{2} &= \frac{x_1}{4} \\ x_2 &= \frac{x_1}{2} \end{aligned}$$

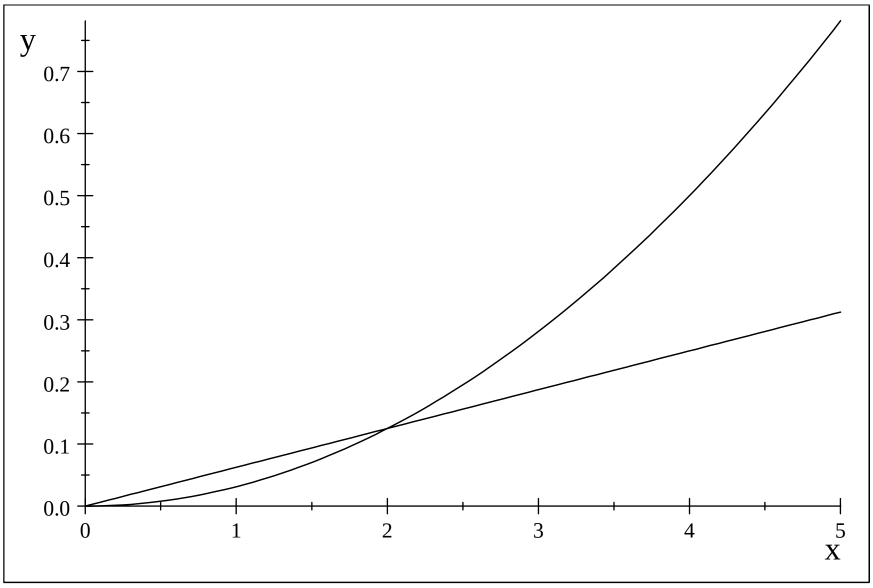
bu değeri kısıtta (üçüncü birinci sıra koşulunda) yerine koyarsak

$$\begin{aligned} a - 2x_1 - 4(\frac{x_1}{2}) &= 0 \\ a - 2x_1 - 2x_1 &= 0 \\ x_1 &= \frac{a}{4} \end{aligned}$$

dolayısıyla $x_1(a) = \frac{a}{4}$ benzer şekilde $x_2(a) = \frac{a}{8}$ ve $\lambda(a) = \frac{a}{16}$. Bu sonuçları amaç fonksiyonuna yerleştirdiğimizde dolaylı amaç fonksiyonunu elde ederiz.

$$V(a) = f(x(a), x_2(a)) = \frac{a}{4}\frac{a}{8} = \frac{a^2}{32}$$

$V(a) = \frac{a^2}{32}$



şimdi merak ettiğimiz a parametresindeki değişikliğin dolaylı amaç fonksiyonunda yarattığı değişmedir? Dolaylı amaç fonksiyonu elimizde olduğundan a'ya göre türevini alarak bu etkiyi bulabiliriz.

$$\frac{dV(a)}{da} = \frac{a}{16}$$

Zarf teoremi ise bize aynı sonucun Lagrange fonksiyonunu ilgili parametreye göre türevinin optimal değerlerde hesaplanması ile elde edileceğini ifade eder. Yani

$$\frac{\partial L}{\partial a}|_{optimalde} = \lambda|_{optimalde} = \frac{a}{16}$$

Bu sonuç bize yapacağımız analizlerde amacımıza göre dolaylı amaç fonksiyonunu veya amaç fonksiyonunu kullanmamazı önerir.